

Sugli sviluppi di Taylor, o -piccolo e O -grande

DEFINIZIONE DI o -PICCOLO E O -GRANDE

Definizione 1. Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ contenente l'origine, una funzione $F : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ ed un numero naturale $n \geq 0$, diciamo che:

- $F(X) = o(|X|^n)$, se

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0;$$

- $F(X) = O(|X|^n)$, se esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $C > 0$ tali che

$$\frac{|F(X)|}{|X|^n} \leq C \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Osservazione 2. Quando $n = 0$ si scrive semplicemente $F(X) = o(1)$ oppure $F(X) = O(1)$, dove:

- $F(X) = o(1)$ vuol dire che $\lim_{X \rightarrow 0} F(X) = 0$;
- $F(X) = O(1)$ vuol dire che esistono una costante $C > 0$ ed un raggio $r > 0$ tali che

$$|F(X)| \leq C \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Osservazione 3. Per dire che $F(X) = o(|X|^n)$ oppure $F(X) = O(|X|^n)$ non è necessario avere che F sia definita nell'origine, anche se nulla impedisce che lo sia, come accade in tanti esempi ed esercizi.

Osservazione 4. Se F è una funzione da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in \mathbb{R} , allora sono equivalenti:

- (a) $F(x, y) = o(|(x, y)|^n)$;
- (b) $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = o(\rho^n)$.

Osservazione 5. Se F è una funzione da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in \mathbb{R} , allora sono equivalenti:

- (A) $F(x, y) = O(|(x, y)|^n)$;
- (B) $F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = O(\rho^n)$.

ALGEBRA DEGLI O -GRANDI

Proposizione 6 (Proprietà di O -grande). Dati un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^N$ contenente l'origine e due funzioni $F : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $G : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$, abbiamo che:

- (a) Se $F(X) = O(|X|^n)$ e $G(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora

$$F(X) + G(X) = O(|X|^n);$$

- (b) Se $F(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$ e $G(X) = O(|X|^m)$ per un qualche $m \geq 0$, allora

$$F(X) \cdot G(X) = O(|X|^{n+m});$$

- (c) Se $\varphi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che $\varphi(Y) = O(|Y|^k)$ per un qualche $k \geq 0$ e se $F(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 1$, allora

$$\varphi(F(X)) = O(|X|^{nk});$$

- (d) Se $F(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora

$$F(X) = O(|X|^k) \quad \text{per ogni } 0 \leq k \leq n.$$

Dimostrazione. (a) Esistono costanti C_1 e C_2 e due raggi r_1 e r_2 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_{r_1} \setminus \{0\};$$

$$|G(X)| \leq C_2|X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_{r_2} \setminus \{0\}.$$

Definiamo

$$r = \min\{r_1, r_2\}.$$

Allora,

$$|F(X) + G(X)| \leq |F(X)| + |G(X)| \leq (C_1 + C_2)|X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Questo dimostra (a).

- (b) Come sopra, esistono costanti C_1 e C_2 e due raggi r_1 e r_2 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_{r_1} \setminus \{0\};$$

$$|G(X)| \leq C_2|X|^m \quad \text{per ogni } X \in B_{r_2} \setminus \{0\}.$$

Prendendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, otteniamo

$$|F(X) \cdot G(X)| \leq |F(X)||G(X)| \leq C_1C_2|X|^{nm} \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\}.$$

- (c) Per mostrare (c), osserviamo che per ipotesi esistono C_φ e $\rho > 0$ tali che

$$|\varphi(Y)| \leq C_\varphi|Y|^k \quad \text{per ogni } Y \in B_\rho \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^M.$$

Inoltre, come sopra, esistono r_1 e C_1 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_{r_1} \setminus \{0\}.$$

Siccome $n \geq 1$ possiamo trovare R_1 abbastanza piccolo tale che

$$C_1R_1^n \leq \rho.$$

Prendendo $r = \min\{r_1, R_1\}$, abbiamo che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \leq C_1R_1^n \leq \rho \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N.$$

Di conseguenza,

$$|\varphi(F(X))| \leq C_\varphi|F(X)|^k \leq C_\varphi(C_1|X|^n)^k = C_\varphi C_1^k |X|^{nk} \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\}.$$

- (d) Sappiamo che esistono r_1 e C_1 tali che

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_{r_1} \setminus \{0\}.$$

Di conseguenza,

$$|F(X)| \leq C_1|X|^n \leq C_1r_1^{n-k}|X|^k \quad \text{per ogni } X \in B_{r_1} \setminus \{0\},$$

ovvero $F(X) = O(|X|^k)$. □

Osservazione 7. Possiamo sintetizzare la proposizione precedente come:

- $O(|X|^n) + O(|X|^n) = O(|X|^n)$ per ogni $n \geq 0$;
- $O(|X|^n) \cdot O(|X|^m) = O(|X|^{n+m})$ per ogni $n, m \geq 0$;
- $O(x^k) \circ O(|X|^n) = O(|X|^{nk})$ per ogni $k \geq 0$ e $n \geq 1$;
- $O(|X|^n) = O(|X|^k)$ per ogni $k \leq n$.

ALGEBRA DEGLI o -PICCOLI

Proposizione 8 (Proprietà di o -piccolo). *Dati un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^N$ contenente l'origine e due funzioni $F : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $G : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$, abbiamo che:*

(a) Se $F(X) = o(|X|^n)$ e $G(X) = o(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora

$$F(X) + G(X) = o(|X|^n);$$

(b) Se $F(X) = o(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$ e $G(X) = o(|X|^m)$ per un qualche $m \geq 0$, allora

$$F(X) \cdot G(X) = o(|X|^{n+m});$$

(c) Se $\varphi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(Y) = o(|Y|^k)$ per un qualche $k \geq 0$ e se $F(X) = o(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora

$$\varphi(F(X)) = o(|X|^{nk});$$

(d) Se $F(X) = o(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora

$$F(X) = o(|X|^k) \quad \text{per ogni } 0 \leq k \leq n.$$

Dimostrazione. (a) Abbiamo che

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{G(X)}{|X|^n} = 0.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{F(X) + G(X)}{|X|^n} = 0.$$

(b) Per ipotesi,

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{G(X)}{|X|^m} = 0.$$

Quindi

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X) \cdot G(X)|}{|X|^{n+m}} \leq \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} \frac{|G(X)|}{|X|^m} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|G(X)|}{|X|^m} = 0.$$

(d) Dimostriamo ora il punto (d). Per $k \leq n$, abbiamo

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X)|}{|X|^k} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} |X|^{n-k} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X)|}{|X|^n} \lim_{X \rightarrow 0} |X|^{n-k} = 0$$

(c) Sappiamo che

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0.$$

Per il punto (d), abbiamo

$$\lim_{X \rightarrow 0} F(X) = 0.$$

Di conseguenza, anche

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} = 0$$

e quindi

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varphi(F(X))}{|X|^{nk}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} \left(\frac{|F(X)|}{|X|^n} \right)^k = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} \lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{|F(X)|}{|X|^n} \right)^k = 0. \quad \square$$

Osservazione 9. Possiamo riscrivere la proposizione precedente come segue:

- $o(|X|^n) + o(|X|^n) = o(|X|^n)$ per ogni $n \geq 0$;
- $o(|X|^n) \cdot o(|X|^m) = o(|X|^{n+m})$ per ogni $n, m \geq 0$;
- $o(x^k) \circ o(|X|^n) = o(|X|^{kn})$ per ogni $n \geq 0$ e $k \geq 0$;
- $o(|X|^n) = o(|X|^k)$ per ogni $k \leq n$.

RELAZIONI FRA o -PICCOLO E O -GRANDE

Proposizione 10. Dati un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^N$ contenente l'origine e una funzione $F : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$, abbiamo che:

- (a) se $F(X) = o(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 0$, allora $F(X) = O(|X|^n)$;
- (b) se $F(X) = O(|X|^n)$ per un qualche $n \geq 1$, allora $F(X) = o(|X|^{n-1})$;
- (c) se $\varphi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che

$$\varphi(0) = 0 \quad e \quad \varphi(Y) = o(|Y|^k) \quad \text{per un qualche } k \geq 0,$$

e se

$$F(0) = 0 \quad e \quad F(X) = O(|X|^n) \quad \text{per un qualche } n \geq 1,$$

allora

$$\varphi(F(X)) = o(|X|^{nk}).$$

Dimostrazione. (a) Siccome

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{F(X)}{|X|^n} = 0,$$

sappiamo che per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che

$$|F(X)| \leq \varepsilon |X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_\varepsilon \setminus \{0\}.$$

(b) Per ipotesi, esistono $C > 0$ e $r > 0$ tali che

$$|F(X)| \leq C |X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_r \setminus \{0\}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X)|}{|X|^{n-1}} \leq \lim_{X \rightarrow 0} \frac{C |X|^n}{|X|^{n-1}} = 0.$$

(c) Sappiamo che esistono C_1 e r_1 tali che

$$|F(X)| \leq C_1 |X|^n \quad \text{per ogni } X \in B_{r_1}.$$

Inoltre, siccome $n \geq 1$,

$$\lim_{X \rightarrow 0} F(X) = 0.$$

Di conseguenza, anche

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varphi(F(X))}{|F(X)|^k} = 0$$

e quindi

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|\varphi(F(X))|}{|X|^{nk}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|\varphi(F(X))|}{|F(X)|^k} \left(\frac{|F(X)|}{|X|^n} \right)^k = 0. \quad \square$$

Osservazione 11. Possiamo riscrivere la proposizione precedente come segue:

- $o(|X|^n) = O(|X|^n)$ per ogni $n \geq 0$;
- $O(|X|^n) = o(|X|^{n-1})$ per ogni $n \geq 1$;
- $o(x^k) \circ O(|X|^n) = o(|X|^{kn})$ per ogni $k \geq 0$ ed ogni $n \geq 1$.

APPLICAZIONI ED ESEMPI

Esempio 12. $x = O(\sqrt{x^2 + y^2})$ e $y = O(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Esempio 13. Dati due interi $n, m \in \mathbb{N}$, $x^n y^m = O(|(x, y)|^{n+m})$.

Esempio 14. Se $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e se $F(X) = O(|X|^n)$ e se G è una funzione limitata (per esempio, una costante), allora

$$F(X)G(X) = O(|X|^n).$$

Esempio 15. Se P è un polinomio n -omogeneo, per esempio $P(x, y) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j} y^j$, allora

$$P(x, y) = O\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^n\right).$$

Esempio 16. Se P è un polinomio tale che $P(0) = 0$, allora

$$P(x, y) = O(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Esempio 17. • $x^2 y = O(|(x, y)|^3)$;

- $x^4 \sqrt{x^2 + y^2} = O(|(x, y)|^5)$;
- $\frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = O(|(x, y)|^2)$;
- $\sqrt{x^4 + y^2} = O(|(x, y)|)$;
- $x^4 y \sqrt{x^2 + y^2} = O(|(x, y)|^6)$;
- $x^2 + y^4 + 3xy^5 = O(|(x, y)|^2)$;
- $x^5 + 3x^2 y^2 + y^3 = O(|(x, y)|^3)$;

Esempio 18. • $o(xy) = o(|(x, y)|^2)$;

• $o(xy^2) = o(|(x, y)|^3)$;

• $o(x + y) = o(|(x, y)|)$;

• $o(x + y^2) = o(|(x, y)|)$;

• $o(x^2y^2 + x^3) = o(|(x, y)|^3)$;

• $o(\sin x) = o(x) = o(|(x, y)|)$.

• $o(\sin(xy)) = o(xy) = o(|(x, y)|^2)$.

Esercizio 19. *Sviluppare la funzione $\sin(xy)$ fino al quarto ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che

$$\sin t = t + o(t^2)$$

Sostituendo con $t = xy$ otteniamo

$$\sin(xy) = xy + o((xy)^2) = xy + o(|(x, y)|^4).$$

□

Esercizio 20. *Sviluppare la funzione $\sin(x + y^2)$ fino al quarto ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4).$$

Sostituendo con $t = x + y^2$ abbiamo

$$\begin{aligned}\sin(x + y^2) &= x + y^2 - \frac{1}{6}(x + y^2)^3 + o((x + y^2)^4) \\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}(x + y^2)^3 + o(|(x, y)|^4) \\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2y^2 + 3x^4y + y^6) + o(|(x, y)|^4) \\ &= x + y^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o(|(x, y)|^4).\end{aligned}$$

□

Esercizio 21. *Sviluppare la funzione e^{x-xy} fino al terzo ordine in zero.*

Soluzione. Abbiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3).$$

Sostituendo con $t = x - xy$ abbiamo

$$\begin{aligned}e^{x-xy} &= 1 + (x - xy) + \frac{1}{2}(x - xy)^2 + \frac{1}{6}(x - xy)^3 + o((x - xy)^3) \\ &= 1 + (x - xy) + \frac{1}{2}(x - xy)^2 + \frac{1}{6}(x - xy)^3 + o(|(x, y)|^3) \\ &= 1 + x - xy + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^2y + x^2y^2) + \frac{1}{6}x^3 + o(|(x, y)|^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{6}x^3 - x^2y + o(|(x, y)|^3).\end{aligned}$$

□

Esercizio 22. Sviluppare la funzione di due variabili $\frac{e^x}{1 - \sin y}$ fino al secondo ordine in zero.

Soluzione. Abbiamo che

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x, y)|^2).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \sin y} &= 1 + \sin y + (\sin y)^2 + o(\sin^2 y) \\ &= 1 + \sin y + (\sin y)^2 + o(|(x, y)|^2) \\ &= 1 + y + o(y^2) + (y + o(y^2))^2 + o(|(x, y)|^2) \\ &= 1 + y + y^2 + o(y^2) + o(|(x, y)|^2) \\ &= 1 + y + y^2 + o(|(x, y)|^2).\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1 - \sin y} &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x, y)|^2)\right) \left(1 + y + y^2 + o(|(x, y)|^2)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) \left(1 + y + y^2\right) + o(|(x, y)|^2) \\ &= 1 + x + y + xy + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + o(|(x, y)|^2).\end{aligned}$$

□

Esercizio 23. Sviluppare la funzione di due variabili $\frac{e^{\sin x}}{1 + xy}$ fino al secondo ordine in zero.

Soluzione. Abbiamo che

$$\begin{aligned}e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + o(\sin^2 x) \\ &= 1 + (x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x, y)|^2).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + xy} &= 1 - xy + o(xy) \\ &= 1 - xy + o(|(x, y)|^2).\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{e^{\sin x}}{1 + xy} &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(|(x, y)|^2)\right) \left(1 - xy + o(|(x, y)|^2)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) \left(1 - xy\right) + o(|(x, y)|^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - xy + o(|(x, y)|^2).\end{aligned}$$

□

Esercizio 24. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero le seguenti funzioni di due variabili:*

$$(1) \frac{e^{\sin y}}{\cos(xy)} ; \quad \frac{\cos(x-y)}{e^{x+y}} ; \quad \frac{\sin x}{e^{xy}} ; \quad \frac{e^{y+x^2}}{1+\sin(xy)} ; \quad \frac{\cos(2x+y)}{1+x} ;$$

$$(2) (1+y)\ln(1+x) ; \quad \ln(1+x+xy) ; \quad \ln(x+\cos y) ; \quad \ln(e^y+\sin x) ; \quad \frac{\ln(1+x)}{1+y} ;$$

$$(3) \sqrt{1-xy} ; \quad \sqrt{1+x+2y} ; \quad \sqrt{y+\cos x} ; \quad (1-xy)\sqrt{1+x^2} ; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x-xy}} .$$

Esercizio 25. *Sviluppare fino al secondo ordine in zero le seguenti funzioni di tre variabili:*

$$\frac{1+\sin xy}{1+z} ; \quad \frac{\cos(z-y)}{e^{y-x}} ; \quad \frac{\sin z}{e^{xy}} ; \quad \frac{1+xy}{\sqrt{1+z-zy}} .$$

COMPLEMENTI. UNA PROPOSIZIONE GENERALE SUGLI SVILUPPI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Per completezza, riportiamo qui sotto una proposizione generale sugli sviluppi di Taylor delle funzioni composte.

Proposizione 26. *Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\varphi(0) = 0$ e*

$$\varphi(t) = P(t) + o(t^K),$$

dove P è un polinomio di grado $K \geq 0$. *Sia $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$F(X) = Q(X) + o(|X|^N),$$

dove Q è un polinomio di grado $N \geq 1$ che si può scrivere come somma di polinomi omogenei nel modo seguente:

$$Q(X) = \sum_{j=n}^N Q_j(X),$$

dove ogni Q_j è j -omogeneo e dove $n \geq 1$. Allora

$$\varphi(F(X)) = P(Q(X)) + o(|X|^m),$$

dove m è il minimo tra N e nK .

Osservazione 27. *Osserviamo che se F è un polinomio, ovvero $F = Q$, allora abbiamo*

$$\varphi(F(X)) = \varphi(Q(X)) = P(Q(X)) + o(|X|^{nK}). \tag{1}$$

Dimostrazione di Proposizione 26. Osserviamo che possiamo scrivere φ ed F usando le funzioni ε ed E definite come:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= P(t) + \varepsilon(t), \quad \text{dove } \varepsilon(t) = o(t^K), \\ F(X) &= Q(X) + E(X), \quad \text{dove } E(X) = o(|X|^N). \end{aligned}$$

Siccome $Q = \sum_{j=n}^N Q_j$ e $n \geq 1$, abbiamo che

$$Q(X) = O(|X|^n).$$

Inoltre, siccome $N \geq n$, abbiamo che

$$E(X) = o(|X|^N) = O(|X|^N) = O(|X|^n).$$

Di conseguenza, anche

$$F(X) = O(|X|^n).$$

Ora, siccome $\varepsilon(t) = o(t^K)$ e $F(X) = O(|X|^n)$ con $n \geq 1$, abbiamo che

$$\varepsilon(F(X)) = o(|X|^{Kn}),$$

e quindi

$$\varphi(F(X)) = P(F(X)) + \varepsilon(F(X)) = P(F(X)) + o(|X|^{Kn}).$$

Infine, scrivendo P come

$$P(t) = \sum_{j=0}^K a_j t^j,$$

abbiamo

$$P(F(X)) = P(Q(X) + E(X)) = \sum_{j=0}^K a_j (Q + E)^j = \sum_{j=0}^K a_j Q(X)^j + o(|X|^N) = P(Q(X)) + o(|X|^N).$$

In conclusione,

$$\varphi(F(X)) = P(Q(X)) + o(|X|^N) + o(|X|^{Kn}),$$

il che conclude la dimostrazione. □